INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A IX-A

1. Se dă mulțimea $M=\left\{a^2-2b^2 \mid a,b\in\mathbb{Z}\right\}$

a) Demonstrați identitatea $\left(a^2-2b^2\right)\cdot\left(c^2-2d^2\right)=\left(ac+2bd\right)^2-2\left(ad+bc\right)^2$, oricare ar fi numerele reale a,b,c,d.

b) Dacă $u,v\in M$, să se demonstreze că şi $u\cdot v\in M$.

c) Utilizând metoda inducției matematice , să se demonstreze că $7^n\in M, (\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$.

SUBIECTUL NR. 1 – 7 puncte		
a).	Se demonstrează identitatea prin calcul direct	3 p.
b).	Alege $u=a^2-2b^2$ *şi* $v=c^2-2d^2$, $a, b, c, d\in\mathbb{R}$	1 p.
	Din identitatea de la punctul precedent, rezultă că $u\cdot v\in M$	1 p.
c).	Pentru $a=3$ *şi* $b=1$ (sau $a=5$ *şi* $b=3$) sau orice alt exemplu deducem că $7\in M$.	1 p.
	Dacă $7^n\in M\Rightarrow 7^{n+1}=7\cdot 7^n\in M$ (conform cu b).)	1 p.

2. O bucată de sârmă având lungimea de 15 m se taie în două bucăți de lungimi diferite şi, din fiecare parte se construieşte câte un pătrat. Să se determine lungimile celor două bucăți, ştiind că pătratul obținut prin „îndoirea" părții mai mari are aria de patru ori mai mare decât aria pătratului obținut prin „îndoirea" părții mai mici.

SUBIECTUL NR. 2 – 7 puncte	
Fie x respectiv $(15-x)$ lungimile celor două părți	1 p.
Conform enunțului trebuie să avem: $\left(\frac{x}{4}\right)^2=4\cdot\left(\frac{15-x}{4}\right)^2\Rightarrow 3x^2-120x+900=0\Rightarrow x^2-40x+300=0$	3 p.
Obținem: $x_1=30$ (nu convine) şi $x_2=10$ SAU $x^2=4\cdot(15-x)^2\Rightarrow x=2\lvert 15-x\rvert$ Acelaşi rezultat îl obținem din egalitatea: $\left(\frac{15-x}{4}\right)^2=4\cdot\left(\frac{x}{4}\right)^2$	2 p.
Aşadar bucata mai mare are 10m, iar cea mică are 5m.	1 p.

3. O mulțime de patru numere naturale se numeşte ***deosebită*** dacă admite exact două submulțimi cu câte trei elemente aflate în progresie aritmetică. De exemplu mulțimea $\{10,11,12,14\}$ este ***deosebită*** deoarece admite submulțimile $\{10,11,12\}$, $\{10,12,14\}$ având elementele în progresie aritmetică. Dacă $A=\{1,2,3,...,10\}$, să se determine :

a) Numărul mulțimilor ***deosebite***, cu câte patru elementele, de forma $\{2,3,..,...\}$, având elementele din A.

b) Numărul total al mulțimilor ***deosebite*** cu elemente din A (evident cu câte patru elemente).

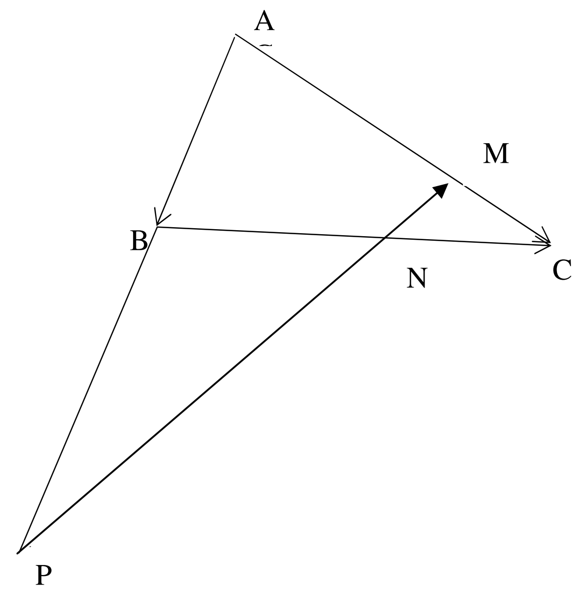
SUBIECTUL NR. 3 – 7 puncte		
a).	Mulțimile deosebite au una dintre formele $\{a,a+r,a+2r,a+3r\}$ sau $\{a,a+r,a+2r,a+4r\}$ Mulțimile deosebite ce conțin pe 2 şi 3 şi au elemente din A sunt: $\{1,2,3,4\}$; $\{1,2,3,5\}$; $\{2,3,4,5\}$ şi $\{2,3,4,6\}$. Aşadar sunt 4 astfel de mulțimi.	3 p.
b).	Mulțimi de forma: $\{a,a+r,a+2r,a+3r\}$ $\begin{cases}\text{Pentru } r=1 \text{ sunt şapte mulțimi:}\{1,2,3,4\};\{2,3,4,5\};.......\{7,8,9,10\}\\ \text{Pentru } r=2 \text{ sunt patru mulțimi:}\{1,3,5,7\};\{2,4,6,8\};\{3,5,7,9\};\{4,6,8,10\}\\ \text{Pentru } r=3 \text{ avem o singură mulțime:}\{1,4,7,10\}\end{cases}$ În acest caz avem 12 mulțimi.	2 p.
	Mulțimi de forma: $\{a,a+r,a+2r,a+4r\}$ $\begin{cases}\text{Pentru } r=1 \text{ sunt şase mulțimi:}\{1,2,3,5\};\{2,3,4,6\};.......\{6,7,8,10\}\\ \text{Pentru } r=2 \text{ sunt două mulțimi:}\{1,3,5,9\};\{2,4,6,10\}\end{cases}$ În acest caz avem 8 mulțimi.	1 p.
	În total avem 20 de mulțimi „deosebite”	1 p.

4. Se consideră triunghiul ABC şi punctele $N\in[BC]$, $M\in[AC]$ astfel încât $\frac{CM}{AM}=\frac{CN}{CB}=\frac{1}{2}$.

a) Să se demonstreze că $\overrightarrow{NM}=\frac{1}{6}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}$.

b) Dacă $NM\cap AB=\{P\}$ și $\frac{AB}{PB}=k$, să se demonstreze că $\overrightarrow{NP}=\frac{k+2}{2k}\cdot\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AC}$.

c) Determinați $t\in\mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{NP}=t\cdot\overrightarrow{NM}$ și găsiți valoarea raportului $\frac{AB}{PB}$.

SUBIECTUL NR. 4 – 7 puncte		
		
a).	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}$	1 p.
	$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right);\ \overrightarrow{MA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$	1 p.
	$\overrightarrow{NM}=\frac{1}{6}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}$	1 p.
b).	$\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AM}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}-\frac{1}{k}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\vec{0}$	1 p.
	Obține: $\overrightarrow{NP}=\frac{k+2}{2k}\cdot\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AC}$	1 p.
c).	Din $\overrightarrow{NP}=t\cdot\overrightarrow{NM}\Rightarrow t=-3$ *şi* $k=1\Rightarrow\frac{AB}{PB}=1$.	2 p.
Metodă alternativă (pentru punctul c).)		
c).	În triunghiul ABC cu transversala $\overline{MNP}$ aplicăm teorema lui MENELAUS Avem: $\frac{NB}{NC}\cdot\frac{MC}{MA}\cdot\frac{PA}{PB}=1$	1 p.
	Cum: $\frac{NB}{NC}=1$ şi $\frac{MC}{MA}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{PA}{PB}=2\Rightarrow\frac{PA+AB}{PB}=2\Rightarrow\frac{AB}{PB}=1$	1 p.

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEŢEANĂ
14 martie 2015

Profil tehnic

FACULTATEA
CONSTRUCŢII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. a) Demonstraţi că: $\log_2^2(x^3) = 9\log_2^2(x),\ (\forall)x > 0$.

b) Rezolvaţi ecuaţia: $\sqrt[3]{3\cdot\log_2^2(x^3)} + 3\cdot\sqrt[3]{\log_2(x)} - 6 = 0,\ x > 0$.

SUBIECTUL NR. 1 – 7 puncte		
a).	$\log_2^2 x^3 = \left(\log_2 x^3\right)^2 = \left(3\cdot\log_2 x\right)^2 = 9\cdot\log_2^2 x$	2 p.
b).	Ecuaţia devine: $\sqrt[3]{\log_2^2 x} + \sqrt[3]{\log_2 x} - 2 = 0$	1 p.
	Notăm $\sqrt[3]{\log_2 x} = t$	1 p.
	Obţinem: $t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow t_1 = 1,\ t_2 = -2$	1 p.
	$\sqrt[3]{\log_2 x} = 1 \Rightarrow x_1 = 2$	1 p.
	$\sqrt[3]{\log_2 x} = -2 \Rightarrow x_2 = 2^{-8}$	1 p.

2. a) Demonstraţi că $a^2 + b^2 + 2 \geq 2a + 2b, (\forall)\, a, b \in \mathbb{R}$. Stabiliţi când are loc egalitatea.

b) Rezolvaţi ecuaţia: $4^x + 9^x + 2 = 2\cdot 2^x + 2\cdot 3^x, x \in \mathbb{R}$.

c) Rezolvaţi ecuaţia: $\log_3 x + \log_x 3 = 2, x \in (0, +\infty)\setminus\{1\}$.

SUBIECTUL NR. 2 – 7 puncte		
a).	$a^2 + b^2 + 2 \geq 2a + 2b \Leftrightarrow \left(a-1\right)^2 + \left(b-1\right)^2 \geq 0$ (<u>adevărat</u>)	1 p.
	Egalitatea are loc pentru $a = b = 1$	1 p.
b).	Notăm $2^x = a$ şi $3^2 = b$	1 p.
	Ecuaţia devine: $\left(2^x - 1\right)^2 + \left(3^x - 1\right)^2 = 0$	1 p.
	Rezultă $2^x = 3^x = 1 \Rightarrow x = 0$	1 p.
c).	$\log_x 3 = \dfrac{1}{\log_3 x}$	1 p.
	Notăm $\log_3 x = y$ şi ecuaţia devine $y + \dfrac{1}{y} = 2 \Rightarrow \left(y-1\right)^2 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow \log_3 x = 1 \Rightarrow x = 3$	1 p.

3. Se consideră numerele complexe: $z_1 = a+ib, a,b \in \mathbb{R}; z_2 = 1+2i$ şi $z_3 = -2+i$.

a) Calculaţi: $|z_2 - z_3|$.

b) Să se determine toate perechile de numere întregi (a,b) astfel încât $|z_1 - z_2| = \sqrt{5}$.

c) Dacă $|z_1 - z_2| = |z_1| + |z_2|$ demonstraţi că $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL NR. 3 – 7 puncte		
a).	$\lvert z_2 - z_3\rvert = \lvert 3+i\rvert = \sqrt{10}$	1 p.
b).	$\lvert z_1 - z_2\rvert = \lvert a-1+(b-2)i\rvert = \sqrt{(a-1)^2+(b-2)^2} = \sqrt{5}$	1 p.
	Putem avea cazurile: $(a-1)^2 = 1$ şi $(b-2)^2 = 4$	1 p.
	sau $(a-1)^2 = 4$ şi $(b-2)^2 = 1$	1 p.
	Obţinem: $(a,b) \in \{(0,0);(2,0);(0,4);(2,4);(-1,1);(-1,3);(3,1);(3,3)\}$	1 p.
c).	$\lvert z_1 - z_2\rvert = \lvert z_1\rvert + \lvert z_2\rvert \Rightarrow (2a-b)^2 = 0 \Rightarrow b = 2a$	1 p.
	$z_1 = a+ib = a+2ia = a\cdot(1+2i) = a\cdot z_2 \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = a \in \mathbb{R}$	1 p.

4. În trei magazin se vinde acelaşi produs. În primul magazin se vând ***m*** bucăţi cu ***p*** lei/bucată. În al doilea magazine se vând cu ***n*** bucăţi mai mult decât în primul magazin la preţul de 40 lei/bucată, iar în al treilea magazin se vând cu ***n*** bucăţi mai puţin decât în primul magazine la preţul de 60 lei/bucată. Ştiind că în cele trei magazine se obţin sume egale de bani din vânzare, aflaţi preţul de vânzare a unei unităţi(bucăţi) de produs la primul magazin.

SUBIECTUL NR. 4 – 7 puncte	
Notăm M_1, M_2, M_3 cele trei magazine. În M_1 se obţin $m\cdot p$ lei	1 p.
În M_2 se obţin $(m+n)\cdot 40$ lei	1 p.
În M_3 se obţin $(m-n)\cdot 60$ lei	1 p.
Conform anunţului avem: $m\cdot p = (m+n)\cdot 40 = (m-n)\cdot 60$	1 p.
Obţinem: $m = 5n$	2 p.
Rezultă $p = 48$ lei	1 p.

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XI-A

1. Se dă matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & x+3 & x+4\\ 3 & x+1 & x+5\end{pmatrix}, (\forall)\ x\in\mathbb{R}$

a). Demonstrați că $A(x)$ este inversabilă dacă şi numai dacă $x\neq 0$.

b). Demonstrați că nu există $B\in M_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A(0)\cdot B=A(-1)$.

c). Determinați $x\in\mathbb{Z}^*$ astfel încât $A^{-1}(x)\in M_3(\mathbb{Z})$

SUBIECTUL NR. 1 – 7 puncte		
a).	$\det A(x)=-x$	1 p.
	$A(x)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det A(x)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$	1 p.
b).	$A(0)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$; $A(-1)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 3 & 4\end{pmatrix}$	1 p.
	Presupunem că există $B\in M_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A(0)\cdot B=A(-1)$. Ar rezulta $\det A(0)\cdot\det B=\det A(-1)$.	1 p.
	Dar $\det A(0)=0$ şi $\det A(-1)=1$. Obținem: $0\cdot\det B=1$ (fals) $\Rightarrow$ nu există $B\in M_3(\mathbb{R})$ care să satisfacă egalitatea.	1 p.
c).	Adjuncta matricei $A(x)$ este: $A^*(x)=\begin{pmatrix}-1 & x+2 & -x-1\\ x+2 & x-4 & -x+2\\ -x-1 & -x+2 & x-1\end{pmatrix}$ Dacă $x\in\mathbb{Z}^*\Rightarrow A^*(x)\in M_3(\mathbb{Z})$	1 p.
	Cum $A^{-1}(x)=-\frac{1}{x}\cdot A^*(x)\Rightarrow A^{-1}(x)\in M_3(\mathbb{Z})\Rightarrow x\in\{-1,1\}$	1 p.

2. Fie a,b,c, lungimile laturilor unui triunghi şi matricea $A(x)=\begin{pmatrix} c-x & b \\ b & c+x \end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$.

a). Demonstrați că $A(x)+A(-x)=2\cdot A(0)$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$.

b). Demonstrați că dacă $\det A(a)=0$, atunci triunghiul dat este dreptunghic.

c). Demonstrați că triunghiul dat este isoscel dacă şi numai dacă $\det A(0)=0$

SUBIECTUL NR. 2 – 7 puncte		
a).	$A(x)+A(-x)=2\cdot\begin{pmatrix} c & b \\ b & c\end{pmatrix}=2\cdot A(0)$	2 p.
b).	$\det A(a)=\begin{vmatrix} c-a & b \\ b & c+a\end{vmatrix}=c^2-a^2-b^2=0\Rightarrow c^2=a^2+b^2$	2 p.
	Conform reciprocei teoremei lui Pitagora rezultă că triunghiul este dreptunghic, având ipotenuza de lungime c	1 p.
c).	$\det A(0)=\begin{vmatrix} c & b \\ b & c\end{vmatrix}=c^2-b^2=(c-b)(c+b)$ Dacă $\det A(0)=0\Rightarrow b=c$ (deci triunghi isoscel)	1 p.
	Dacă $b=c\Rightarrow\det A(0)=0$	1 p.

3. a). Se dă funcția $f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\alpha\cdot x^4}{(x+\beta)^3}$

Să se determina $\alpha,\beta\in(0,\infty)$ astfel încât graficul funcției să admită, ca asimptotă oblică spre ∞ dreapta de ecuație $y=x-3$

b). Se dă funcția $f:(0,4)\setminus\{3\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 2\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2+x+4}}{x-3}, & \text{dacă } x\in(0,3) \\ -\dfrac{\sin 2(x-3)}{8(x-3)}, & \text{dacă } x\in(3,4)\end{cases}$

Calculați limitele laterale ale funcției f în punctul $x_0=3$.

SUBIECTUL NR. 3 – 7 puncte		
a).	$m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\alpha x^4}{x(x+\beta)^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\alpha x^4}{x^4+3\beta x^3+.........}=\alpha=1$	1 p.
	$n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\alpha x^4}{x(x+\beta)^3}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-x(x+\beta)^3}{x^3+3\beta x^2+3\beta^2x+\beta^3}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3\beta x^3-3\beta^2x-\beta^3}{x^3+3\beta x^2+3\beta^2x+\beta^3}=-3\beta=-3\Rightarrow\beta=1$	2 p.
b).	$l_s=\lim\limits_{x\nearrow 3}\dfrac{2\cdot\left[\sqrt{x^2+7}-\sqrt{x^2+x+4}\right]}{x-3}=\lim\limits_{x\nearrow 3}\dfrac{-2}{\sqrt{x^2+7}+\sqrt{x^2+x+4}}=-\dfrac{1}{4}$	2 p.
	$l_d=\lim\limits_{x\searrow 3}\dfrac{-\sin 2(x-3)}{8(x-3)}=-\lim\limits_{x\searrow 3}\dfrac{\sin 2(x-3)}{2(x-3)}\cdot\dfrac{2(x-3)}{8(x-3)}=-\dfrac{1}{4}$	1 p.

	Cum $l_s = l_d = -\frac{1}{4} \Rightarrow$ există $\lim_{x\to 3} f(x) = -\frac{1}{4}$	1 p.

4. Zece elevi $E_1, E_2, E_3, E_4, ..., E_{10}$ sunt aşezaţi, în această ordine, în „şir indian” (ca şi puncte coliniare cu E_1 pe primul loc şi E_{10} pe ultimul loc). La o comandă dată, fiecare dintre ei fie că îşi schimbă locul cu un alt coleg, fie că rămân pe loc. La prima comandă elevii E_1 şi E_6 rămân pe locurile lor, iar E_2 schimbă cu E_{10}, E_3 cu E_9, E_4 cu E_8 şi E_5 cu E_7.

a) Care este ordinea lor după prima comandă?

b) Este posibil ca după a doua comandă să avem ordinea: $E_{10}; E_1; E_2; E_3; E_4; E_5; E_6; E_7; E_8; E_9$? Justificaţi răspunsul.

SUBIECTUL NR. 4 – 7 puncte		
a).	Inițial: $E_1; E_2; E_3; E_4; E_5; E_6; E_7; E_8; E_9; E_{10}$ După prima comandă: $E_1; E_{10}; E_9; E_8; E_7; E_6; E_5; E_4; E_3; E_2$	3 p.
b).	Da. $E_1 \leftrightarrow E_{10}; E_2 \leftrightarrow E_9; E_3 \leftrightarrow E_8; E_4 \leftrightarrow E_7; E_5 \leftrightarrow E_6$ Se obține ordine: $E_{10}; E_1; E_2; E_3; E_4; E_5; E_6; E_7; E_8; E_9$	4 p.

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
14 martie 2015

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Profil tehnic

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII-A

1. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale se defineşte legea de compoziție „ $*$ ” prin:
$x*y=xy-ax-ay+a^2+a,\ (\forall)\ x,y\in\mathbb{R}$ şi $a\in\mathbb{R}$, fixat .

a). Să se demonstreze că: $x*y=(x-a)\cdot(y-a)+a,\ (\forall)\ x,y\in\mathbb{R}$.

b). Demonstrați că mulțimea $G_a=(a,\infty),\ a\in\mathbb{R}$ este parte stabilă a mulțimii $\mathbb{R}$ în raport cu legea „ $*$ ”.

c). Demonstrați că $(G_a,*)$ este grup abelian.

d). Rezolvați ecuația: $\underbrace{x*x*x*\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots*x}_{2015\ ori}=x$

SUBIECTUL NR. 1 – 7 puncte		
a).	$x*y=x(y-a)-a(y-a)+a=(x-a)(y-a)+a$	1 p.
b).	Să demonstrăm că $(\forall)\ x,y\in G_a\Rightarrow x*y\in G_a\Leftrightarrow(\forall)\ x>a,\ y>b,\Rightarrow(x-a)(y-a)+a>0.$ (adevărat) $\Rightarrow G_a$ este parte stabilă a mulțimii $\mathbb{R}$ în raport cu legea **„ $*$ ”**	1 p.
c).	Comutativitatea este evidentă. $(x*y)*z=\left[(x-a)(y-a)+a\right]*z=(x-a)(y-a)(z-a)+a=x*(y*z)$, $(\forall)\ x,y,z\in G_a\Rightarrow$ operația $"*"$ este asociativă.	1 p.
	Elementul neutru este: $e=a+1>a\Rightarrow e\in G_a$	1 p.
	Simetricul elementului $x\in G_a$ este $x'=a+\dfrac{1}{x-a}\in G_a$	1 p.
d).	$x*x=(x-a)^2+a\Rightarrow x*x*x=(x-a)^3+a,\ \ldots\ldots,\ \underbrace{x*x*x*\ldots.*x}_{2015\ ori}=(x-a)^{2015}+a$	1 p.
	$(x-a)^{2015}+a=x\Rightarrow(x-a)^{2014}=1\Rightarrow x_1=a-1\notin G_a$ şi $x_2=a+1\in G_a$, deci este soluția ecuației. Obs! Poate observa că $x=e=a+1$ este o soluție dar trebuie demonstrată <u>unicitatea</u> ei!	1 p.

2. Fie $A(x)=\begin{pmatrix}7^x & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$ şi mulţimea $G=\{A(x)/x\in\mathbb{R}\}$

a). Verificaţi faptul că $I_3\in G$.

b). Demonstraţi că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, $(\forall)\ x,y\in\mathbb{R}$.

c). Demonstraţi că $(G,\bullet)$ este grup comutativ.

SUBIECTUL NR. 2 – 7 puncte		
a).	$A(0)=I_3\Rightarrow I_3\in G$	1 p.
b).	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}7^{x+y} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=A(x+y)$	1 p.
c).	$A(x)\cdot A(y)=A(x+y)=A(y+x)=A(y)\cdot A(x)\Rightarrow$ comutativitate $(A(x)\cdot A(y))\cdot A(z)=A(x+y)\cdot A(z)=A(x+y+z)=A(x)\cdot A(y+z)=$ $=A(x)\cdot(A(y)\cdot A(z))$, $(\forall)\ x,y,z\in\mathbb{R}\Rightarrow$ asociativitatea.	2 p.
	$A(x)\cdot A(e)=A(x)\Rightarrow A(x+e)=A(x)\Rightarrow x+e=x\Rightarrow e=0\Rightarrow A(0)\in G$ este element neutru.	1 p.
	$A(x)\cdot A(x')=A(0)\Rightarrow A(x+x')=A(0)\Rightarrow x'=-x\Rightarrow A(-x)=\begin{pmatrix}7^{-x} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in G$ este simetrica matricei $A(x)$	2 p.

3. a). Demonstraţi că: $x^4+4=(x^2+2x+2)\cdot(x^2-2x+2)$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$

b). Calculaţi: $\int\frac{x^2+2}{x^4+4}\cdot dx$, $x\in\mathbb{R}$

c). Demonstraţi că $\frac{x^2+2}{x^4+4}<\frac{2}{3}$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$ şi dacă există un număr natural nenul n astfel încât să avem: $\int_0^1\frac{x^2+2}{x^4+4}\cdot dx<0,001$.

SUBIECTUL NR. 3 – 7 puncte		
a).	Se veridică prin calcul direct	1 p.
b).	$\int\frac{x^2+2}{x^4+4}\cdot dx=\int\frac{x^2+2}{(x^2+2x+2)\cdot(x^2-2x+2)}\cdot dx=\frac{1}{2}\cdot\int\frac{dx}{x^2-2x+2}$	2 p.
	$\int\frac{x^2+2}{x^4+4}\cdot dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^2+1}=\frac{1}{2}arctg(x+1)+\frac{1}{2}arctg(x-1)+C$	1 p.
c).	$\frac{x^2+2}{x^4+4}<\frac{2}{3}\Leftrightarrow 2x^4-3x^2+2>0\Leftrightarrow x^4-\frac{2}{3}x^2+1>0\Leftrightarrow\left(x^2-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{16}>0$ (adevărat)	1 p.
d).	Folosind inegalitatea de la c). avem $\int_0^1\left(\frac{x^2+2}{x^4+4}\right)^n\cdot dx=\int_0^1\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot dx$	1 p.

	Trebuie să avem: $\left(\frac{2}{3}\right)^n < 0{,}001$ şi cum $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ rezultă că există un număr $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât să aibă loc. SAU Logaritmăm inegalitatea de mai sus şi ținem seama de faptul că: $\lg\left(\frac{2}{3}\right) = \lg 2 - \lg 3 < 0$. Obținem: $n\cdot(\lg 2 - \lg 3) < -3 \Rightarrow n\cdot(\lg 3 - \lg 2) < 3 \Rightarrow n > \frac{3}{\lg 3 - \lg 2}$ Luăm: $n = \left[\frac{3}{\lg 3 - \lg 2}\right] + 1$ unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x.	1 p.

4. Se consideră funcția $f:[-1,\infty)\to\mathbb{R}$, dată prin:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{e^{x+1}}, \text{ dacă } x\in[0,\infty)\\ \dfrac{2x+m}{x^2+x+e} \text{ dacă } x\in[-1,0), \text{ unde } m\in\mathbb{R}\end{cases}$$

a). Determinați parametrul real m astfel încât funcția f să admită primitive pe intervalul $[-1,\infty)$.

b). Determinați o primitivă $F' = F(x)$ a restricției funcției f la intervalul $[0,\infty)$, care satisface condiția $F(0)=\frac{3}{e}$.

c) Demonstrați că $\int_0^1 f(x)\cdot dx < \frac{3}{e}$.

SUBIECTUL NR. 4 – 7 puncte		
a).	$l_d = f(0) = \frac{1}{e}$ şi $l_s = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(\frac{2x+m}{x^2+x+e}\right) = \frac{m}{e}$	1 p.+ 1 p.
	Pentru $m=1$, funcția f este continuă şi în $x=0$ şi deci admite primitive pe intervalul $[-1,\infty)$	1 p.
b).	$F(x)=\int (x+1)\cdot e^{-(x+1)}\cdot dx = -(x+1)\cdot e^{-(x+1)} + \int e^{-(x+1)}\cdot dx = -(x+2)\cdot e^{-(x+1)} + C$	1 p.
	Din $F(0)=\frac{3}{e} \Rightarrow C=\frac{5}{e} \Rightarrow F(x)=\frac{5}{e}-\frac{x+2}{e^{x+1}}$	1 p.
c).	$f(x)\cdot dx = -\frac{x+2}{e^{x+1}}\Big\vert_0^1 = -\frac{3}{e^2}+\frac{2}{e}$	1 p.
	$\int_0^1 f(x)\cdot dx < \frac{3}{e} \Leftrightarrow \frac{2}{e}-\frac{3}{e^2} < \frac{3}{e} \Leftrightarrow \frac{3}{e^2} > -\frac{1}{e}$ (adevărat)	1 p.